

# **Un nuevo enfoque de optimización basado en la teoría de juegos evolutiva no estructurada**

## **A New Optimization Approach Based on Unstructured Evolutionary Game Theory**

Marcos Mario Vasquez Franco<sup>1\*</sup>

marcos.vasquez7891@alumnos.udg.mx

Nahum Juda Aguirre Rodriguez<sup>1</sup>

Hector Joaquin Escobar Cuevas<sup>1</sup>

Alberto Luque Chang<sup>1</sup>

Erik Valdemar Cuevas Jimenez<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Universidad de Guadalajara

\*Autor para correspondencia

## Resumen

Proponer nuevos métodos metaheurísticos es crucial para la mejora continua en el desarrollo de algoritmos y la capacidad de abordar con eficacia problemas de optimización del mundo real cada vez más complejos. Por otro lado, la Teoría Evolutiva de Juegos analiza cómo a través de la competencia es posible modificar las estrategias de los individuos dentro de una población con el fin de extender los mecanismos exitosos y reducir o eliminar las estrategias menos exitosas. Este artículo presenta un novedoso enfoque de optimización basado en los principios de la Teoría Evolutiva de Juegos. En el método propuesto, todos los individuos se inicializan mediante la técnica Metropolis-Hasting, que sitúa las soluciones en un punto de partida más cercano a las regiones óptimas o casi óptimas del problema. Se asigna una estrategia original a cada individuo de la población. Al tener en cuenta las interacciones y la competencia entre los distintos agentes del problema de optimización, el enfoque modifica las estrategias para mejorar la eficiencia de la búsqueda y encontrar mejores soluciones. Para evaluar el rendimiento de la técnica propuesta, se compara con ocho algoritmos metaheurísticos bien conocidos utilizando 30 funciones de prueba. La metodología propuesta demostró superioridad en términos de calidad de la solución, dimensionalidad y convergencia en comparación con otros enfoques.

**Palabras clave:** Metaheurística, Teoría de Juegos, Optimización, competición, Metropolis-Hasting.

## Abstract

Proposing new metaheuristic methods is crucial for the continuous improvement in algorithm development and the ability to effectively tackle increasingly complex real-world optimization problems. On the other hand, Evolutionary Game Theory analyzes how, through competition, it is possible to modify the strategies of individuals within a population to extend successful mechanisms and reduce or eliminate less successful strategies. This article presents a novel optimization approach based on the principles of Evolutionary Game Theory. In the proposed method, all individuals are initialized using the Metropolis-Hasting technique, which places the solutions at a starting point closer to the optimal or near-optimal regions of the problem. Each individual in the population is assigned an original strategy. By taking into account the interactions and competition among the various agents of the optimization problem, the approach modifies the strategies to improve search efficiency and find better solutions. To evaluate the performance of the proposed technique, it is compared with eight well-known metaheuristic algorithms using 30 test functions. The proposed methodology demonstrated superiority in terms of solution quality, dimensionality, and convergence compared to other approaches. **Keywords:** Metaheuristic, Game Theory, Optimization, Competition, Metropolis-Hasting.

## 1. Introducción

La optimización [1] se utiliza para determinar la mejor solución para una función objetivo teniendo en cuenta un conjunto dado de restricciones. El proceso de optimización se centra en maximizar o minimizar la función objetivo. Además, pueden clasificarse en optimización clásica o metaheurística [2]. La primera se basa en cálculos matemáticos sistemáticos como los gradientes. Aunque la optimización clásica puede encontrar soluciones adecuadas, tiene varias desventajas, como el estancamiento en óptimos locales, especialmente para problemas complejos no diferenciables.

Las metaheurísticas [3] son aproximaciones estocásticas que incorporan diversos mecanismos para explorar y explotar el espacio de búsqueda con el fin de encontrar una solución factible. Estos algoritmos son técnicas de uso general que no requieren el uso de gradientes. Se han utilizado diferentes taxonomías para clasificar los algoritmos metaheurísticos. El método más común para clasificarlos se basa en la inspiración. Se pueden clasificar como bio-inspirados o basados en leyes físicas [4].

Los algoritmos metaheurísticos bio-inspirados se han caracterizado por simular principios y mecanismos biológicos. La mayoría de los algoritmos entran en esta categoría. Estas técnicas pueden agruparse en volutivas, de inteligencia de enjambre y de sistema inmune [2]. La colonia de abejas artificiales (ABC) [5], el algoritmo del murcielago (BA) [6], el algoritmo de evolución diferencial (DE) [7], el algoritmo de optimización del enjambre de partículas (PSO) [8], la búsqueda del cuco (CS) [9] y el algoritmo de búsqueda del cuervo (CSA) [10] son algunos ejemplos de algoritmos metaheurísticos bioinspirados. Por otro lado, los métodos metaheurísticos basados en leyes físicas se distinguen por el uso de principios y procesos físicos, matemáticos y químicos. La estrategia de evolución adaptativa de la matriz de covarianza (CMA-ES) [11], el algoritmo de búsqueda armónica (HS) [12], el algoritmo seno-coseno (SCA) [13], el algoritmo de recocido simulado (SA) [14], y la búsqueda de estados de la materia (SMS) [15] son ejemplos de esta categoría. Los algoritmos metaheurísticos han demostrado su superioridad en varias aplicaciones del mundo real en las que no pueden utilizarse técnicas clásicas [16-19]. Sin embargo, ningún algoritmo puede resolver todos los problemas [20]. Además, la complejidad de estos problemas ha aumentado, teniendo en cuenta la no linealidad y la naturaleza dinámica de sus entornos. Aunque se han desarrollado muchos algoritmos metaheurísticos, deben continuar los esfuerzos para crear nuevos métodos que aborden estos complejos retos.

En metaheurística, la inicialización [21] es el proceso de crear una población inicial de soluciones al principio del proceso de optimización. La población inicial sirve como punto de partida para que el algoritmo metaheurístico explore y mejore iterativamente. El objetivo de un método de inicialización es generar un conjunto diverso de soluciones candidatas que cubran una amplia gama del espacio de soluciones, proporcionando una base para que el algoritmo comience su búsqueda de soluciones óptimas o casi óptimas. En la literatura se han documentado ampliamente varios métodos de inicialización [22]. Entre ellos, destaca el método Metropolis-Hasting [23]. Este método en particular introduce una forma única de generar valores iniciales mediante el muestreo de la distribución de probabilidad de la función objetivo, centrándose en concentrarse alrededor de sus valores más prometedores.

Por otro lado, la Teoría Evolutiva de Juegos (EGT) [24] es una rama de la biología matemática y la economía que trata de comprender la dinámica de las interacciones estratégicas entre individuos o agentes de una población, donde el éxito de la estrategia de cada individuo se ve influido por las estrategias de los demás. Combina principios de la teoría clásica de juegos (GT) con ideas de la biología evolutiva para estudiar cómo pueden surgir y evolucionar distintas estrategias a lo largo del tiempo mediante un proceso de interacción. En la Teoría de Juegos tradicional, los individuos toman decisiones para maximizar su propia utilidad o beneficio sin tener en cuenta el impacto de sus acciones en la población. Sin embargo, en la EGT, los individuos se consideran parte de una

población, y sus estrategias están sujetas a cambios y adaptaciones en función de su éxito relativo en comparación con los demás [25]. En la EGT, los individuos de una población interactúan en competiciones repetidas entre sí. En estas competiciones, los individuos comparan y contrastan sus respectivas estrategias. En este proceso competitivo, los individuos evalúan el éxito relativo o la rentabilidad de sus estrategias basándose en los resultados de sus interacciones con los demás. Los resultados de estas comparaciones desempeñan un papel crucial a la hora de determinar la adaptación y la evolución de las estrategias dentro de la población. Según los principios de la EGT, el objetivo primordial es conducir la evolución de las estrategias dentro de una población hacia el éxito y la optimización del comportamiento de los individuos. Esto implica modificar las estrategias de cada individuo de tal manera que se fomente la propagación de las estrategias exitosas y su prevalencia entre la población, mientras que las estrategias menos exitosas disminuyen gradualmente o incluso se eliminan. La EGT tiene aplicaciones [26-28], en diversos campos, como la biología, la economía, la sociología e incluso la informática. Puede ayudar a explicar la aparición y persistencia de determinados comportamientos y estrategias de cooperación observados en la naturaleza y la sociedad.

En la EGT, las interacciones entre los individuos de la población se modelan considerando dos paradigmas: estructurado y no estructurado. Los enfoques estructurados [29] tienen en cuenta la estructura espacial o social de las interacciones entre los individuos de una población. En este contexto, “estructurado” se refiere a los patrones o restricciones específicos que rigen la forma en que los individuos interactúan entre sí, creando una red de relaciones. Los modelos no estructurados [21] consideran escenarios en los que los individuos interactúan entre sí de forma aleatoria, sin patrones ni restricciones específicas. Este esquema de interacción aleatoria suele modelarse utilizando un concepto conocido como supuesto de “campo medio”, en el que cada individuo interactúa con un gran número de otros individuos de la población con la misma probabilidad.

Los principios de la EGT han demostrado su eficacia a la hora de comprender y modelizar cómo evolucionan y se adaptan las estrategias para aumentar el éxito individual dentro de una población. Sin embargo, a pesar de su eficacia en diversas áreas y aplicaciones, el uso directo de los mecanismos de la EGT para producir nuevos métodos metaheurísticos es muy escaso. Una excepción es el enfoque presentado en [30], donde algunos elementos de la EGT se han integrado en un algoritmo PSO para mejorar su convergencia.

El campo de la optimización es muy diverso y abarca una amplia gama de problemas con complejidades, tamaños y características variables. Aunque algunos problemas pueden tener estructuras y propiedades bien definidas que permiten a algoritmos específicos destacar, no existe un algoritmo único que pueda resolver todos los problemas de optimización de forma competitiva. El desarrollo de nuevos métodos metaheurísticos es, por tanto, crucial para mejorar el rendimiento algorítmico y abordar con eficacia la complejidad cada vez mayor de los problemas de optimización del mundo real. Este artículo presenta un nuevo enfoque de optimización que tiene en cuenta los principios de la EGT. El nuevo enfoque comienza inicializando todos los individuos mediante la técnica Metropolis-Hasting, posicionando las soluciones más cerca de las regiones óptimas o casi óptimas del problema. Tras el proceso de inicialización, cada individuo de la población recibe una estrategia original. A medida que avanza el algoritmo, se producen interacciones y competencia entre estos individuos, lo que permite una adaptación y ajuste continuos de sus estrategias. El objetivo primordial es promover la propagación de las estrategias exitosas en toda la población, al tiempo que se reducen o eliminan gradualmente las fracasadas. Al refinar y actualizar continuamente las estrategias en función de su rendimiento, el algoritmo utiliza eficazmente las estrategias de búsqueda más prometedoras para explorar y explotar el espacio de soluciones. Este mecanismo de adaptación estratégica mejora la capacidad del algoritmo para identificar el óptimo global o soluciones cercanas al óptimo en problemas de optimización complejos. El método se comparó con ocho algoritmos metaheurísticos bien conocidos utilizando un conjunto diverso de 30

funciones de prueba comunmente utilizadas en la investigación de la optimización. Los resultados empíricos demostraron la superioridad del método propuesto en múltiples métricas importantes. En términos de calidad de la solución, el enfoque propuesto superó sistemáticamente a los algoritmos competidores, ofreciendo soluciones de mayor calidad y precisión. También demostró su capacidad para converger a soluciones óptimas o casi óptimas con una precisión impresionante, incluso cuando se trata de funciones complejas y multimodales.

Este artículo está organizado como sigue: En la sección 2 se describen los conceptos preliminares. Después, en la sección 3 se presenta el enfoque de optimización de teoría de juegos evolutiva propuesto. Además, en la sección 4 se analizan y discuten los resultados experimentales. Por último, en la sección 5 se abordan las conclusiones y el trabajo futuro.

## **2. Conceptos preliminares**

Esta sección proporciona una introducción completa a los conceptos fundamentales de la teoría de juegos y el método de inicialización Metrópolis-Hasting, que son muy relevantes para el método propuesto. La teoría de juegos es un marco analítico robusto para estudiar interacciones estratégicas entre decisores racionales. Permite modelar y analizar escenarios complejos en los que los resultados dependen de las decisiones tomadas por múltiples actores.

Además, el método de inicialización Metrópolis-Hasting es un enfoque novedoso para los algoritmos metaheurísticos. La fase de inicialización desempeña un papel crucial en la eficiencia y eficacia de los algoritmos metaheurísticos. Sin embargo, a menudo ha recibido menos atención que otros componentes como los operadores de movimiento y los métodos de selección. La integración de estos métodos en el marco propuesto tiene como objetivo crear nuevas estrategias de búsqueda para el proceso de optimización con el fin de aumentar el rendimiento y la velocidad de convergencia, dando lugar a soluciones mejoradas para problemas de optimización complejos.

### *2.1 Teoría evolutiva de juegos*

En la Teoría Evolutiva de Juegos (TEJ) [31], los individuos de una población participan en competiciones recurrentes entre ellos. Durante estas competiciones, los individuos evalúan y contrastan sus propias estrategias. A través de este proceso competitivo, los individuos evalúan el éxito relativo de sus estrategias observando los resultados de su comparación con los demás. Los resultados de estas evaluaciones influyen significativamente en la adaptación y evolución de las estrategias dentro de la población [32].

Durante las competiciones repetidas, los individuos ponen en práctica sus estrategias e interactúan con los demás. Los resultados de estas interacciones generan una medida del éxito o la aptitud de cada estrategia. Los individuos evalúan el rendimiento de sus estrategias en relación con las de los demás y observan el éxito asociado a cada estrategia. Basándose en estas comparaciones y observaciones, los individuos pueden adaptar y modificar sus estrategias para mejorar su éxito relativo. Las estrategias que producen mayores beneficios o superan a otras en la competición tienen más posibilidades de mantenerse y propagarse en la población. Por el contrario, las estrategias menos exitosas pueden ser descartadas o sustituidas con el tiempo. El proceso de comparar estrategias y adaptarlas en función de los resultados de las competiciones es fundamental en la TEJ. Impulsa la dinámica de la evolución de las estrategias dentro de la población. A medida que las estrategias exitosas se hacen más frecuentes, la población en su conjunto evoluciona, favoreciendo el predominio de estrategias que conducen a una mayor aptitud en el entorno dado.

En TEJ, los procesos más comunes y cruciales se consiguen mediante la comparación por pares y la actualización probabilística de estrategias. Considerando una población de  $n$  elementos, el proceso comienza con un individuo  $i$  que selecciona aleatoriamente otro elemento  $j$  de la población ( $i, j \in 1, \dots, n$ ). A continuación, se comparan sus respectivas estrategias y, si se comprueba que la estrategia de  $i$  es peor que la del elemento  $j$  (es decir, que la estrategia de  $j$  produce una aptitud mayor), el individuo  $i$  tiene dos acciones posibles [25]. En primer lugar, puede imitar la estrategia de  $j$ , adoptando el mismo enfoque que el elemento más exitoso. Alternativamente,  $i$  puede alterar su estrategia para parecerse más a la de  $j$ , con el objetivo de aumentar su rendimiento. La decisión de cambiar la estrategia de  $i$  se toma de forma probabilística, siendo la probabilidad de actualización directamente proporcional a las diferencias de estrategias entre  $i$  y  $j$ . Este enfoque probabilístico permite la exploración en la búsqueda de mejores estrategias y, a lo largo de las iteraciones, las estrategias exitosas tienden a extenderse y dominar en la población, mientras que las menos exitosas disminuyen.

TEJ considera dos paradigmas para modelar las interacciones entre individuos dentro de una población: enfoques estructurados y no estructurados. En los enfoques estructurados [29], la comparación entre las estrategias de los individuos se limita a sus elementos vecinos. El concepto central de los métodos estructurados es centrarse en la estructura espacial o social de las interacciones, donde patrones o restricciones específicas dictan cómo interactúan los individuos, lo que lleva a la creación de una red de relaciones. Por el contrario, los modelos no estructurados [21] exploran escenarios en los que las interacciones o comparaciones entre estrategias se producen de forma aleatoria, sin ningún vecindario o patrón específico. En los enfoques no estructurados, cada individuo tiene la misma probabilidad de interactuar con cualquier otro individuo de la población. Los modelos no estructurados proporcionan una representación más abstracta, en la que el énfasis se pone en estudiar la dinámica a nivel de población y la aparición de comportamientos colectivos sin la influencia de interacciones específicas.

## *2.2 Inicialización de Metropolis Hasting*

El proceso de crear una población inicial de soluciones al principio del proceso de optimización se denomina inicialización en metaheurística. Esta población inicial sirve como punto de partida para que el algoritmo explore y mejore iterativamente. El objetivo de un método de inicialización es generar un conjunto diverso de soluciones candidatas que cubran una amplia gama del espacio de soluciones, proporcionando una base para que el algoritmo comience su búsqueda de soluciones óptimas o casi óptimas. En la literatura se han documentado ampliamente varios métodos de inicialización [33]. Todos los métodos de inicialización comparten un elemento común fundamental. Su objetivo principal es conseguir una distribución uniforme de las soluciones iniciales por todo el espacio de búsqueda, con la intención de cubrirlo exhaustivamente. El objetivo de estos métodos es dispersar espacialmente las soluciones candidatas, sin tener en cuenta su calidad o rendimiento con respecto a la función objetivo.

El enfoque Metropolis-Hastings [34] genera un conjunto inicial de soluciones candidatas mediante el muestreo de la función objetivo  $f(x)$ , utilizando la técnica Metropolis-Hastings [35]. Con este método, las soluciones iniciales tienden a agruparse en torno a los valores destacados de la función objetivo a optimizar, aproximándose mucho a ellos. Los pasos para utilizar el algoritmo Metropolis-Hastings como método de inicialización pueden resumirse como sigue:

1	Comience con un valor inicial $\mathbf{x}^k$ o una muestra de la función objetivo $f(\mathbf{x})$ .
2	Proponer un nuevo valor $\mathbf{y}$ o una muestra de $f(\mathbf{y})$ . $\mathbf{y}$ se genera como una perturbación del estado actual $\mathbf{x}^k$ con un valor aleatorio producido por la distribución normal $N(0,1)$ .
3	<p>La probabilidad de aceptación <math>\alpha</math> de la muestra propuesta <math>\mathbf{y}</math> depende de la relación que mantengan los valores de la muestra actual <math>f(\mathbf{x}^k)</math> y la muestra candidata <math>f(\mathbf{y})</math>. Por lo tanto, la probabilidad <math>\alpha</math> se calcula de la siguiente manera:</p> $\alpha = \min \left\{ \frac{f(\mathbf{y})}{f(\mathbf{x}^k)}, 1 \right\} \quad (1)$ <p>Esta probabilidad <math>\alpha</math> determina si la muestra propuesta será aceptada o rechazada.</p>
4	Bajo esta regla probabilística, se genera un número aleatorio $r$ uniformemente distribuido $U(0,1)$ . Si $r < \alpha$ , la muestra candidata $\mathbf{y}$ se acepta como el nuevo estado $\mathbf{x}^{k+1}$ , en caso contrario, $\mathbf{y}$ se descarta, de modo que $\mathbf{x}^k$ queda como el nuevo estado $\mathbf{x}^{k+1}$ .
5	Repita los pasos 2-4 durante $n$ veces para obtener el conjunto inicial de soluciones.

### 3. Enfoque propuesto

En el contexto de la optimización, el teorema del "no-free-lunch" [20] es un concepto fundamental que pone de manifiesto las limitaciones inherentes a cualquier algoritmo de optimización. Este teorema tiene profundas connotaciones porque implica que para cada algoritmo de optimización que funcione bien en un conjunto específico de problemas, habrá otros problemas para los que funcione mal. Algunos algoritmos pueden destacar en determinados espacios problemáticos o clases de problemas, mientras que otros pueden ser más adecuados para distintos tipos de retos de optimización. Dadas las limitaciones de cualquier algoritmo individual, la creación de nuevas metodologías de optimización resulta esencial. El desarrollo de enfoques novedosos puede dar lugar a herramientas más especializadas que se adapten a las características específicas de los problemas. Mediante el diseño de nuevas técnicas de optimización, los investigadores pueden profundizar en el conocimiento de las estructuras de los problemas, identificar heurísticas eficaces y explotar conocimientos específicos de cada ámbito.

En este estudio se presenta un algoritmo metaheurístico novedoso e innovador, cuyo objetivo es abordar problemas de optimización con eficacia. Nuestro algoritmo pretende identificar la solución global para un problema no lineal formulando un problema de optimización con la siguiente descripción:

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & f(\mathbf{p}) \\ \text{Sujeto a} & \mathbf{p} \in \mathbf{X} \end{array} \quad \mathbf{p} = (p_1, \dots, p_d) \in \mathbb{R}^d \quad (2)$$

donde  $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  es una función no lineal d-dimensional y  $\mathbf{X}$  representa el espacio de búsqueda ( $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d | l_i \leq p_i \leq u_i, i = 1, \dots, d$ ) definido por los límites inferior ( $l_i$ ) y superior ( $u_i$ ). El método propuesto combina dos elementos clave para lograr su capacidad de optimización. En primer lugar, el algoritmo adopta la técnica Metrópolis-Hasting [34] como método de inicialización. En segundo lugar, el algoritmo incorpora un procedimiento basado en los principios de TEJ para evolucionar las posiciones de todas las soluciones de la población.

### 3.1 Inicialización con Metropolis-Hasting

El paso inicial de nuestro método consiste en obtener un conjunto de  $n$  posiciones iniciales  $\{\mathbf{p}_1^0, \dots, \mathbf{p}_n^0\}$  utilizando el método Metropolis-Hastings. Mediante esta técnica, posicionamos estratégicamente estas soluciones iniciales alrededor de las regiones prominentes de la función objetivo. Con ello, pretendemos garantizar que nuestro algoritmo inicie su proceso de optimización a partir de zonas prometedoras del espacio de soluciones, aumentando la probabilidad de encontrar soluciones de alta calidad. El uso de Metropolis-Hastings nos permite crear una población inicial que explora la vecindad de las características importantes de la función objetivo, proporcionando una base sólida para las iteraciones de optimización posteriores.

### 3.2 Modificación de soluciones mediante la TEJ

El enfoque propuesto en nuestro algoritmo implica dos ciclos distintos de actualización durante el proceso de optimización. El primer ciclo se centra en la actualización de las soluciones candidatas, mientras que el segundo ciclo se dedica a la actualización de las estrategias empleadas por los individuos.

En el primer ciclo, actualizamos iterativamente las soluciones candidatas en el espacio de búsqueda. Esto se consigue mediante un proceso sistemático de exploración de las regiones vecinas en cada iteración. Al actualizar continuamente las posiciones, el algoritmo se esfuerza por navegar por el espacio de soluciones y converger hacia regiones más prometedoras que puedan contener la solución global. El segundo ciclo gira en torno a la actualización de las estrategias de los individuos de la población. Las estrategias representan el comportamiento o enfoque adoptado por cada individuo durante el proceso de optimización. A través de este ciclo, el algoritmo permite a los individuos adaptar y evolucionar sus estrategias basándose en su rendimiento anterior y en los resultados de sus interacciones con otros individuos. Esta estrategia permite al algoritmo afinar el comportamiento de la población y responder dinámicamente a los cambios en el panorama de optimización.

La TEJ considera la dinámica de las interacciones entre los individuos de una población. Por tanto, los individuos participan en un ciclo recurrente de competiciones, en el que evalúan y comparan continuamente sus estrategias. En el contexto de nuestro algoritmo, las "estrategias" representan las distintas opciones o elecciones de comportamiento de que disponen los individuos de la población. En nuestro algoritmo, a cada individuo  $i$  de la población se le asigna inicialmente una estrategia o comportamiento aleatorio  $S(i)$ . La estrategia implica un punto de partida  $\mathbf{p}_i^0$  y un vector de desviación estándar  $\boldsymbol{\sigma}_i = \{\sigma_{1,i}, \dots, \sigma_{d,i}\}$ , donde cada valor  $\sigma_m$  ( $m \in 1, \dots, d$ ) se genera como un valor aleatorio entre 0 y 1.

#### A) Modificación de las soluciones candidatas

En cada iteración  $k$ , cada individuo utiliza su estrategia  $S(i)$  para seleccionar una nueva posición candidata  $\mathbf{p}_i^{k+1}$  realizando una pequeña perturbación aleatoria en la solución actual  $\mathbf{p}_i^k$ . Esta perturbación se genera en base a una distribución de probabilidad normal  $N(0, \boldsymbol{\sigma}_i)$  considerando el siguiente modelo:

$$\mathbf{p}_i^{k+1} = \mathbf{p}_i^k + R \cdot N(0, \boldsymbol{\sigma}_i) = S(i) \quad (3)$$

donde  $R$  representa la perturbación máxima admisible.

## B) Modificación de estrategias

En TEJ, el proceso más importante se consigue mediante un mecanismo de comparación por pares con actualización de estrategias. Según este mecanismo, en cada iteración  $k$  del algoritmo, se aplica el siguiente proceso a cada individuo de la población.

1. **Selección.** Para el individuo  $\mathbf{p}_i^k$ , selecciona aleatoriamente otro elemento  $\mathbf{p}_j^k$ , de la población, con la condición de que  $i \neq j$ .
2. **Comparación de estrategias.** Una vez que el individuo  $\mathbf{p}_i^k$  ha elegido el elemento  $\mathbf{p}_j^k$ , compara sus respectivas estrategias  $S(i)$  y  $S(j)$  en función de sus valores de aptitud  $f(\mathbf{p}_i^k)$  y  $f(\mathbf{p}_j^k)$ , respectivamente.
3. **Evaluación de la estrategia.** Si la estrategia  $S(i)$  del individuo  $i$  resulta ser peor que la estrategia  $S(j)$  del elemento  $j$  (es decir, la estrategia de  $j$  produce un valor de fitness más alto), entonces el individuo  $\mathbf{p}_i^k$  considera actualizar su estrategia.
4. **Actualización probabilística de la estrategia.** La decisión de si el individuo  $i$  cambiará su estrategia se toma de forma probabilística. La probabilidad  $Pr$  de actualizar la estrategia es directamente proporcional a las diferencias de estrategias entre el individuo  $i$  y el elemento  $j$ . En estas condiciones, el valor  $Pr$  se calcula de la siguiente manera:

$$Pr = \left| \frac{f(\mathbf{p}_j^k) - f(\mathbf{p}_i^k)}{MF} \right| \quad (4)$$

donde  $MF$  simboliza el peor valor de la función objetivo encontrado hasta el momento. Según este modelo, cuanto más disímiles sean las estrategias, mayor será la probabilidad de que el individuo  $i$  modifique su estrategia.

5. **Estrategia de actualización.** En nuestro enfoque, la probabilidad  $\mathbf{Pr}$  desempeña un papel crucial a la hora de determinar si la estrategia de un individuo se adaptará o no. Cuando  $\mathbf{Pr}$  favorece la adaptación de la estrategia, el algoritmo inicia un proceso de modificación en dos pasos para cada individuo  $i$  de la población, que implica la actualización tanto del vector de desviación típica como de su posición.

En la primera modificación, el individuo  $i$  adopta el mismo vector de desviación típica que otro individuo  $j$  de la población ( $\sigma_i = \sigma_j$ ). Este proceso se conoce como proceso de imitación en el contexto de la TEJ. Al adoptar la estrategia exitosa del individuo  $j$ , el individuo  $i$  pretende imitar la estrategia que ha mostrado un rendimiento superior. Este proceso de imitación permite que las estrategias exitosas se extiendan y ganen prevalencia en la población, aumentando las posibilidades de lograr mejores soluciones.

En la segunda modificación, el individuo  $i$  sufre un ajuste en su posición  $p_i^k$  para parecerse más a la posición  $p_j^k$  del individuo  $j$ . Este ajuste es una modificación basada en la diferencia aleatoria entre las posiciones de ambos individuos. Este ajuste se modela de la siguiente manera:

$$p_i^{k+1} = r \cdot D - p_i^{k+} \quad (5)$$

donde  $r$  es un número aleatorio entre 0,5 y 1,  $D = \text{distancia}(p_i^k, p_j^k)$ . Al realizar esta adaptación, el algoritmo permite al individuo  $i$  explorar la región alrededor de la posición del individuo  $j$  que ha tenido éxito y que ha dado resultados positivos en el proceso de optimización. Esta exploración permite la posibilidad de encontrar soluciones nuevas y potencialmente mejores en las proximidades de las estrategias exitosas.

La combinación de estas dos modificaciones garantiza que los individuos de la población adapten sus estrategias en función del éxito y los resultados de los demás. Este mecanismo adaptativo permite al algoritmo responder dinámicamente a los cambios en el panorama de optimización, fomentando la propagación de estrategias exitosas y la exploración de regiones prometedoras en el espacio de soluciones.

Al aplicar iterativamente estas modificaciones a cada individuo de la población, el algoritmo evoluciona y refina las estrategias de la población a lo largo de múltiples generaciones. Este proceso contribuye a la convergencia general del algoritmo hacia soluciones óptimas en el contexto del problema de optimización dado.

#### 4. Resultados de la Experimentación

En esta sección, se han realizado una serie de experimentos para de este modo evaluar el rendimiento del algoritmo propuesto U-EGTA. Los resultados obtenidos fueron comparados con aquellos obtenidos por los siguientes algoritmos: La Colonia de Abejas Artificiales (ABC) [5], el Algoritmo del Murciélago (BA) [6], la Estrategia de Evolución de Adaptación de la Matriz de Covarianza (CMAES) [11], la Evolución Diferencial (DE) [7], el Algoritmo de Búsqueda de Armonía (HS) [12], el Algoritmo de Optimización por Enjambre de Partículas (PSO) [8], el Algoritmo Cuckoo Search (CS) [9], y el Algoritmo de Búsquedas de Cuervos (CSA) [10], los cuales han sido implementados en una gran variedad de estudios de la optimización.

Para simplificar la comparación de los resultados, todos los métodos fueron configurados de acuerdo con lo establecido en sus documentos guías. Las especificaciones de las configuraciones se muestran en la Tabla 1:

Algoritmo	Parámetros	Referencia
ABC	Limite = 50	[5]
BA	Volumen (A = 2), Frecuencia de Pulsos (r = 0.9), Frecuencia Mínima (Qmin = 0) y Frecuencia Máxima (Qmax = 1)	[6]
CMAES	Lambda = 50, número de padres = 25, sigma = 60, csigma = 0.32586, dsigma = 1.32586	[11]
DE	CR = 0.5, y F = 0.2	[7]
HS	HCMR = 0.7, y PArate = 0.3	[12]
PSO	c <sub>1</sub> = 2, y c <sub>2</sub> = 2; el factor de peso decrece linealmente de 0.9 hasta 0.2	[8]
CS	Pa = 0.25	[9]
CSA	Bandada = 50, probabilidad de conciencia = 0.1, longitud del vuelo = 2	[10]

Tabla 1. Parámetros de los algoritmos

En todos los experimentos realizados, se utilizó una población de 50 agentes para la búsqueda en cada uno de los algoritmos. Además, el criterio de paro se estableció en 50,000 accesos a función para lograr un análisis óptimo. Del mismo modo, para evaluar el rendimiento de cada uno de los algoritmos se usaron tres indicadores: la mejor solución promedio obtenida (AB), la mejor solución mediana (MD) y la desviación estándar (SD) de las mejores soluciones. En cada uno de los problemas de optimización, los algoritmos se ejecutaron 30 veces, resultando en 30 diferentes soluciones. El valor de la variable AB es calculada de estos resultados mientras que la mediana es usada para determinar la media, y la desviación estándar es usada para medir el SD de las mejores soluciones.

La sección de experimentación está dividida en tres subsecciones: en la primera subsección 4.1 se analiza el rendimiento del algoritmo U-EGTA en comparación de otros algoritmos metaheurísticos; en la segunda subsección 4.2 se implementan diversos experimentos para identificar las diferencias significativas en el comportamiento de los algoritmos usando la prueba de Wilcoxon rank sum; y en la tercera subsección 4.3 se presenta la discusión de las curvas de convergencia más significativas de las funciones implementadas.

#### 4.1. Comparación de resultados en términos de calidad

En esta subsección, se analiza el rendimiento del algoritmo propuesto U-EGTA comparándolo contra ocho de los más conocidos algoritmos metaheurísticos, siendo estos el ABC, BA, CMAES, CS, CSA, DE, HS, y el PSO. Para demostrar la efectividad del algoritmo propuesto, un set de 30 funciones ( $f_1(x) - f_{30}(x)$ ) justo como se describe en el Apéndice A) fueron implementadas para su análisis. De acuerdo con los resultados de la Tabla 2, U-EGTA sobresale en 23 funciones a comparación del resto de algoritmos siendo esto en las funciones  $f_1(x) - f_3(x)$ ,  $f_9(x) - f_{10}(x)$ ,  $f_{12}(x) - f_{17}(x)$ , y en  $f_{19}(x) - f_{30}(x)$ .

Function		ABC	BA	CMAES	DE	HS	PSO	CS	CSA	UEGTA
$f_1(x)$	AB	2.17E+00	1.54E+01	5.62E-10	1.24E-07	1.22E+01	9.48E-05	6.86E+00	1.72E+01	<b>0.00E+00</b>
	MD	2.16E+00	1.53E+01	5.51E-10	3.71E-08	1.20E+01	2.54E-06	6.69E+00	1.74E+01	<b>0.00E+00</b>
	SD	4.64E-01	1.05E+00	1.67E-10	3.57E-07	5.46E-01	4.86E-04	1.11E+00	5.41E-01	<b>0.00E+00</b>
$f_2(x)$	AB	5.67E+02	4.87E+00	6.67E-01	6.87E-01	1.99E+04	1.07E+02	8.88E+00	1.49E+05	<b>2.47E-01</b>
	MD	5.02E+02	6.71E-01	6.67E-01	6.67E-01	1.87E+04	4.17E+01	8.81E+00	1.57E+05	<b>2.49E-01</b>
	SD	2.82E+02	1.07E+01	2.98E-08	1.13E-01	5.11E+03	1.36E+02	1.89E+00	3.61E+04	<b>7.79E-03</b>
$f_3(x)$	AB	1.04E+00	1.54E+02	7.40E-18	3.12E-03	4.32E+01	1.00E-02	1.15E+00	1.67E+02	<b>0.00E+00</b>
	MD	1.04E+00	1.34E+02	0.00E+00	4.34E-14	4.42E+01	3.70E-03	1.16E+00	1.70E+02	<b>0.00E+00</b>
	SD	1.83E-02	6.09E+01	4.05E-17	5.25E-03	6.55E+00	1.30E-02	4.11E-02	2.54E+01	<b>0.00E+00</b>
$f_4(x)$	AB	9.71E+00	1.70E+01	<b>2.34E-19</b>	4.82E-02	1.24E+01	7.57E-02	1.25E+01	5.68E+01	1.71E-06
	MD	9.78E+00	1.78E+01	<b>2.21E-19</b>	2.15E-15	1.24E+01	7.62E-12	1.28E+01	5.73E+01	8.68E-07
	SD	2.93E+00	7.41E+00	<b>1.46E-19</b>	1.16E-01	1.56E+00	1.72E-01	2.72E+00	7.76E+00	2.96E-06
$f_5(x)$	AB	-9.59E+03	-3.16E+07	-9.25E+01	<b>2.00E+00</b>	3.27E+01	3.41E+01	1.81E+09	2.15E+07	<b>2.00E+00</b>
	MD	-1.53E+03	-1.05E+06	-4.16E+01	<b>2.00E+00</b>	3.29E+01	9.00E+00	2.00E+00	1.73E+05	<b>2.00E+00</b>
	SD	3.24E+04	1.38E+08	1.51E+02	<b>0.00E+00</b>	1.15E+01	1.13E+02	3.80E+09	6.88E+07	<b>0.00E+00</b>

$f_6(x)$	AB	-4.32E+03	-2.24E+07	-8.51E+01	<b>2.00E+00</b>	4.81E+01	1.24E+01	2.33E+09	3.29E+07	<b>2.00E+00</b>
	MD	-1.19E+03	-2.16E+06	-2.33E+01	<b>2.00E+00</b>	4.37E+01	9.00E+00	2.00E+00	3.53E+05	<b>2.00E+00</b>
	SD	7.49E+03	7.59E+07	1.37E+02	<b>1.55E-15</b>	2.01E+01	1.83E+01	4.30E+09	1.40E+08	<b>0.00E+00</b>
$f_7(x)$	AB	1.49E-01	1.83E-15	1.33E-11	1.04E-12	1.25E-03	<b>0.00E+00</b>	<b>0.00E+00</b>	9.33E-02	<b>0.00E+00</b>
	MD	1.48E-01	1.44E-15	8.49E-12	2.05E-29	1.23E-03	<b>0.00E+00</b>	<b>0.00E+00</b>	8.84E-02	<b>0.00E+00</b>
	SD	3.53E-02	1.66E-15	1.33E-11	4.74E-12	4.53E-04	<b>0.00E+00</b>	<b>0.00E+00</b>	2.09E-02	<b>0.00E+00</b>
$f_8(x)$	AB	7.29E-05	1.23E+06	4.62E-205	<b>0.00E+00</b>	4.89E-40	<b>0.00E+00</b>	1.59E-04	2.32E+01	<b>0.00E+00</b>
	MD	4.76E-07	1.18E+00	1.70E-211	<b>0.00E+00</b>	4.59E-44	<b>0.00E+00</b>	2.65E-07	5.00E+00	<b>0.00E+00</b>
	SD	3.05E-04	4.09E+06	0.00E+00	<b>0.00E+00</b>	1.17E-39	<b>0.00E+00</b>	4.33E-04	4.93E+01	<b>0.00E+00</b>
$f_9(x)$	AB	1.38E+07	1.18E+07	7.22E+01	8.79E+01	6.57E+06	8.28E+01	1.36E+05	4.32E+07	<b>7.11E+01</b>
	MD	1.27E+07	1.41E+07	7.24E+01	7.37E+01	6.75E+06	8.29E+01	1.42E+05	4.52E+07	<b>7.11E+01</b>
	SD	3.69E+06	7.65E+06	1.09E+00	7.59E+01	1.18E+06	3.28E+00	2.89E+04	8.04E+06	<b>2.65E-03</b>
$f_{10}(x)$	AB	1.90E+06	9.38E+06	1.05E+02	1.06E+02	8.55E+06	1.02E+02	3.05E+04	7.58E+07	<b>4.64E+01</b>
	MD	1.83E+06	6.14E+06	1.05E+02	1.05E+02	8.69E+06	1.02E+02	3.11E+04	7.09E+07	<b>4.64E+01</b>
	SD	5.46E+05	1.10E+07	1.16E+00	3.51E+00	2.29E+06	4.71E+00	8.62E+03	1.99E+07	<b>6.01E-02</b>
$f_{11}(x)$	AB	<b>3.00E+01</b>	5.63E+01	<b>3.00E+01</b>	<b>3.00E+01</b>	3.45E+01	<b>3.00E+01</b>	<b>3.00E+01</b>	5.92E+01	<b>3.00E+01</b>
	MD	<b>3.00E+01</b>	5.60E+01	<b>3.00E+01</b>	<b>3.00E+01</b>	3.45E+01	<b>3.00E+01</b>	<b>3.00E+01</b>	5.90E+01	<b>3.00E+01</b>
	SD	<b>0.00E+00</b>	4.33E+00	<b>0.00E+00</b>	<b>0.00E+00</b>	1.36E+00	<b>0.00E+00</b>	<b>1.83E-01</b>	1.58E+00	<b>0.00E+00</b>
$f_{12}(x)$	AB	5.42E+02	8.48E-03	1.51E-03	7.52E-04	4.63E+02	2.62E+02	1.29E+00	2.07E+03	<b>4.17E-189</b>
	MD	4.94E+02	6.78E-03	1.29E-03	7.06E-04	4.52E+02	2.05E+02	1.28E+00	2.20E+03	<b>0.00E+00</b>
	SD	2.21E+02	4.60E-03	9.48E-04	4.13E-04	9.30E+01	2.90E+02	4.25E-01	3.78E+02	<b>0.00E+00</b>
$f_{13}(x)$	AB	1.19E+01	2.22E+01	9.05E+00	9.76E+00	1.46E+01	1.07E+01	1.06E+01	2.42E+01	<b>8.84E+00</b>
	MD	1.20E+01	2.04E+01	9.11E+00	9.76E+00	1.45E+01	1.07E+01	1.06E+01	2.38E+01	<b>8.95E+00</b>
	SD	7.80E-01	7.65E+00	2.93E-01	5.31E-01	6.82E-01	5.88E-01	3.41E-01	3.00E+00	<b>4.78E-01</b>
$f_{14}(x)$	AB	2.31E+02	9.37E+01	1.06E+02	1.52E+02	9.34E+01	4.84E+01	1.09E+02	2.60E+02	<b>0.00E+00</b>
	MD	2.31E+02	8.76E+01	1.60E+02	1.47E+02	9.53E+01	4.78E+01	1.07E+02	2.61E+02	<b>0.00E+00</b>
	SD	1.37E+01	4.21E+01	7.77E+01	2.37E+01	9.73E+00	1.89E+01	1.50E+01	1.22E+01	<b>0.00E+00</b>
$f_{15}(x)$	AB	1.54E+03	5.46E+01	1.89E+01	3.04E+01	1.58E+04	2.96E+04	1.92E+02	2.32E+05	<b>1.91E+00</b>
	MD	1.45E+03	2.94E+01	1.08E+01	2.56E+01	1.61E+04	2.53E+03	1.94E+02	2.30E+05	<b>1.00E-04</b>
	SD	5.41E+02	3.99E+01	2.51E+01	1.71E+01	3.38E+03	3.75E+04	3.92E+01	5.10E+04	<b>7.28E+00</b>
$f_{16}(x)$	AB	5.59E+01	4.44E+01	4.21E-07	1.20E+01	4.04E+01	6.81E+00	1.10E+01	5.12E+01	<b>0.00E+00</b>
	MD	5.58E+01	4.51E+01	3.88E-07	1.19E+01	4.03E+01	7.12E+00	1.09E+01	5.14E+01	<b>0.00E+00</b>
	SD	4.41E+00	6.67E+00	1.58E-07	5.37E+00	2.26E+00	2.31E+00	1.20E+00	2.40E+00	<b>0.00E+00</b>
$f_{17}(x)$	AB	1.99E+25	2.14E+32	2.05E-07	2.09E-05	1.56E+02	2.29E+02	1.00E+10	6.22E+29	<b>0.00E+00</b>
	MD	2.76E+23	5.97E+26	2.02E-07	5.91E-06	1.63E+02	2.14E+02	1.00E+10	1.72E+29	<b>0.00E+00</b>
	SD	8.15E+25	8.30E+32	6.77E-08	6.57E-05	2.94E+02	9.79E+01	0.00E+00	1.03E+30	<b>0.00E+00</b>
$f_{18}(x)$	AB	9.00E+00	1.94E+04	<b>0.00E+00</b>	1.33E-01	4.79E+03	3.33E-02	3.38E+01	1.87E+04	<b>0.00E+00</b>
	MD	9.00E+00	1.95E+04	<b>0.00E+00</b>	0.00E+00	4.71E+03	0.00E+00	3.40E+01	1.85E+04	<b>0.00E+00</b>
	SD	2.63E+00	6.37E+03	<b>0.00E+00</b>	3.46E-01	6.97E+02	1.83E-01	9.25E+00	2.28E+03	<b>0.00E+00</b>
$f_{19}(x)$	AB	-7.38E+02	-1.00E+03	-1.12E+03	-1.15E+03	-1.10E+03	-1.07E+03	-1.01E+03	-7.30E+02	<b>-1.17E+03</b>
	MD	-7.39E+02	-1.01E+03	-1.12E+03	-1.16E+03	-1.10E+03	-1.06E+03	-1.01E+03	-7.25E+02	<b>-1.17E+03</b>
	SD	3.56E+01	4.74E+01	2.33E+01	2.19E+01	1.40E+01	2.57E+01	1.24E+01	2.87E+01	<b>2.73E-02</b>
$f_{20}(x)$	AB	-2.62E+14	-2.54E+14	-8.90E+13	-2.33E+01	-2.78E+01	-2.84E+01	-2.86E+01	-6.81E+13	<b>-3.00E+01</b>
	MD	-2.60E+14	-2.52E+14	-7.63E+13	-2.31E+01	-2.79E+01	-2.81E+01	-2.85E+01	-6.96E+13	<b>-3.00E+01</b>
	SD	5.21E+13	6.19E+13	4.43E+13	2.14E+00	3.42E-01	1.23E+00	3.34E-01	1.91E+13	<b>4.55E-06</b>
$f_{21}(x)$	AB	1.52E+03	4.55E+02	8.78E+02	1.07E+00	1.67E+02	2.06E+02	1.48E+02	4.84E+02	<b>1.05E-106</b>
	MD	1.32E+03	2.86E+02	8.50E+02	8.68E-01	1.72E+02	1.92E+02	1.49E+02	4.52E+02	<b>1.10E-219</b>
	SD	4.97E+02	4.92E+02	2.16E+02	7.32E-01	2.48E+01	1.26E+02	2.33E+01	1.32E+02	<b>5.77E-106</b>
$f_{22}(x)$	AB	2.48E+01	6.13E+04	4.86E-16	1.10E-13	2.39E+04	3.58E+03	8.02E+01	1.15E+05	<b>0.00E+00</b>
	MD	2.31E+01	5.97E+04	4.03E-16	5.58E-14	2.49E+04	7.29E-10	7.21E+01	1.19E+05	<b>0.00E+00</b>
	SD	8.61E+00	4.42E+04	2.69E-16	1.82E-13	3.95E+03	5.30E+03	2.91E+01	1.51E+04	<b>0.00E+00</b>
$f_{23}(x)$	AB	8.56E+02	2.74E+06	9.77E-14	8.34E-12	6.73E+05	2.30E+05	2.86E+03	4.05E+06	<b>0.00E+00</b>
	MD	8.06E+02	2.57E+06	8.32E-14	1.25E-12	6.93E+05	1.35E+05	2.69E+03	4.26E+06	<b>0.00E+00</b>
	SD	2.69E+02	1.70E+06	7.60E-14	3.01E-11	1.16E+05	2.79E+05	7.83E+02	6.48E+05	<b>0.00E+00</b>
$f_{24}(x)$	AB	1.24E-02	1.26E-05	1.46E-20	7.29E-17	1.28E+01	7.55E-13	4.22E-02	4.87E+01	<b>0.00E+00</b>
	MD	1.17E-02	1.28E-05	1.52E-20	2.99E-17	1.30E+01	1.94E-13	4.38E-02	4.89E+01	<b>0.00E+00</b>
	SD	3.24E-03	1.84E-06	6.73E-21	1.12E-16	1.77E+00	2.03E-12	9.79E-03	5.57E+00	<b>0.00E+00</b>
$f_{25}(x)$	AB	5.73E-01	1.73E+01	1.41E-18	4.03E-15	5.88E+02	6.33E+01	2.02E+00	2.47E+03	<b>0.00E+00</b>
	MD	5.12E-01	1.77E-03	1.16E-18	1.52E-15	5.87E+02	3.94E-11	1.94E+00	2.63E+03	<b>0.00E+00</b>
	SD	2.27E-01	5.86E+01	8.43E-19	8.45E-15	6.35E+01	1.10E+02	4.67E-01	4.05E+02	<b>0.00E+00</b>
$f_{26}(x)$	AB	6.46E-04	1.02E-08	6.08E-10	6.69E-12	3.03E-05	1.07E-23	3.99E-11	8.21E-03	<b>5.58E-36</b>
	MD	4.18E-04	1.01E-08	4.14E-10	5.52E-18	3.03E-05	9.47E-29	3.94E-11	7.48E-03	<b>3.34E-64</b>
	SD	6.92E-04	3.84E-09	5.48E-10	3.57E-11	1.41E-05	5.82E-23	2.36E-11	4.28E-03	<b>3.05E-35</b>
$f_{27}(x)$	AB	7.03E+02	3.02E+04	3.60E-09	4.45E-08	4.46E+03	1.34E+03	1.53E+03	1.97E+04	<b>0.00E+00</b>
	MD	1.25E+02	2.83E+04	3.66E-09	3.97E-08	4.46E+03	4.28E-07	1.35E+03	2.02E+04	<b>0.00E+00</b>
	SD	2.50E+03	2.10E+04	1.20E-09	2.67E-08	7.40E+02	3.47E+03	7.46E+02	3.07E+03	<b>0.00E+00</b>

$f_{28}(x)$	AB	2.11E+02	5.39E+02	3.26E+01	3.63E+01	3.44E+02	6.60E+01	1.61E+02	7.33E+02	<b>2.90E+01</b>
	MD	2.14E+02	5.47E+02	2.90E+01	3.69E+01	3.46E+02	6.35E+01	1.60E+02	7.39E+02	<b>2.90E+01</b>
	SD	2.12E+01	1.28E+02	6.51E+00	7.08E+00	2.77E+01	1.81E+01	1.31E+01	6.32E+01	<b>5.64E-05</b>
$f_{29}(x)$	AB	2.72E+05	3.27E+07	3.30E+01	3.46E+01	6.61E+06	9.52E+01	3.12E+02	6.78E+07	<b>3.20E+01</b>
	MD	2.11E+05	1.44E+07	3.30E+01	3.32E+01	6.63E+06	8.72E+01	3.06E+02	7.05E+07	<b>3.20E+01</b>
	SD	2.46E+05	4.23E+07	5.64E-10	4.28E+00	1.98E+06	3.66E+01	4.74E+01	2.24E+07	<b>4.42E-06</b>
$f_{30}(x)$	AB	3.47E+02	9.24E+02	3.03E+01	3.24E+01	3.44E+02	7.46E+01	3.54E+02	9.18E+02	<b>2.90E+01</b>
	MD	3.34E+02	9.31E+02	2.90E+01	2.90E+01	3.49E+02	5.48E+01	3.42E+02	9.14E+02	<b>2.90E+01</b>
	SD	7.40E+01	3.06E+02	3.98E+00	6.44E+00	3.14E+01	6.80E+01	5.84E+01	1.13E+02	<b>0.00E+00</b>

Tabla 2. Comparación de resultados en términos de calidad

#### 4.2 Comparación en términos de significancia

En esta segunda subsección, se realiza un estudio del tipo no paramétrico para evaluar la relevancia estadística comparado con los otros algoritmos. Para validar los resultados obtenidos se emplea un análisis de Wilcoxon rank-sum test [36], la cual es una prueba que determina si existe una diferencia importante entre ambos métodos. Este análisis específicamente compara el rendimiento del algoritmo U-EGTA contra el resto siendo el ABC, BA, CMAES, CS, CSA, DE, HS y PSO. Los resultados del análisis de Wilcoxon indican que existe una diferencia significativa, por lo cual se rechaza la hipótesis nula.

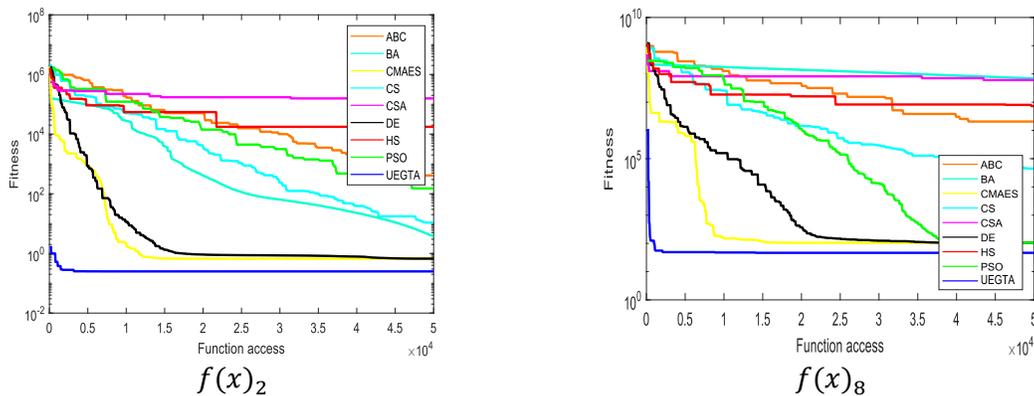
Function	UEGTA vs ABC	UEGTA vs BA	UEGTA vs CMAES	UEGTA vs DE	UEGTA vs HS	UEGTA vs PSO	UEGTA vs CS	UEGTA vs CSA
$f_1(x)$	1.21E-12▲	1.21E-12▲	1.21E-12▲	1.21E-12▲	1.21E-12▲	1.21E-12▲	1.21E-12▲	1.21E-12▲
$f_2(x)$	3.02E-11▲	2.61E-10▲	5.57E-10▲	4.62E-10▲	3.02E-11▲	2.61E-10▲	3.02E-11▲	3.02E-11▲
$f_3(x)$	1.21E-12▲	1.21E-12▲	1.61E-01▲	1.21E-12▲	1.21E-12▲	1.21E-12▲	1.21E-12▲	1.21E-12▲
$f_4(x)$	3.02E-11▲	3.02E-11▲	3.02E-11▼	7.73E-02▲	3.02E-11▲	1.07E-07▲	3.02E-11▲	3.02E-11▲
$f_5(x)$	0.00E+00▲	1.35E-03▲	0.00E+00▲	0.00E+00▶	1.21E-12▲	2.76E-07▲	2.92E-04▲	1.21E-12▲
$f_6(x)$	0.00E+00▲	1.25E-05▲	0.00E+00▲	0.00E+00▶	1.21E-12▲	3.05E-07▲	2.78E-03▲	1.21E-12▲
$f_7(x)$	1.21E-12▲	1.21E-12▲	1.21E-12▲	3.13E-04▲	1.21E-12▲	3.34E-01▲	4.19E-02▲	1.21E-12▲
$f_8(x)$	1.21E-12▲	1.21E-12▲	1.21E-12▲	0.00E+00▶	1.21E-12▲	0.00E+00▶	1.21E-12▲	1.21E-12▲
$f_9(x)$	3.02E-11▲	3.02E-11▲	1.00E+00▲	5.57E-10▲	3.02E-11▲	3.02E-11▲	3.02E-11▲	3.02E-11▲
$f_{10}(x)$	3.02E-11▲	3.02E-11▲	3.02E-11▲	3.02E-11▲	3.02E-11▲	3.02E-11▲	3.02E-11▲	3.02E-11▲
$f_{11}(x)$	0.00E+00▶	1.19E-12▲	0.00E+00▶	0.00E+00▶	1.00E-12▲	0.00E+00▶	2.14E-02▶	1.11E-12▲
$f_{12}(x)$	1.21E-12▲	1.21E-12▲	1.21E-12▲	1.21E-12▲	1.21E-12▲	1.21E-12▲	1.21E-12▲	1.21E-12▲
$f_{13}(x)$	3.02E-11▲	3.02E-11▲	2.42E-02▲	7.09E-08▲	3.02E-11▲	9.92E-11▲	7.39E-11▲	3.02E-11▲
$f_{14}(x)$	1.21E-12▲	1.21E-12▲	1.21E-12▲	1.21E-12▲	1.21E-12▲	1.21E-12▲	1.21E-12▲	1.21E-12▲
$f_{15}(x)$	3.02E-11▲	9.92E-11▲	5.07E-10▲	4.62E-10▲	3.02E-11▲	6.07E-11▲	3.02E-11▲	3.02E-11▲
$f_{16}(x)$	1.21E-12▲	1.21E-12▲	1.21E-12▲	1.21E-12▲	1.21E-12▲	1.21E-12▲	1.21E-12▲	1.21E-12▲
$f_{17}(x)$	1.21E-12▲	1.21E-12▲	1.21E-12▲	1.21E-12▲	1.21E-12▲	1.21E-12▲	1.69E-14▲	1.21E-12▲
$f_{18}(x)$	1.12E-12▲	1.21E-12▲	0.00E+00▶	2.14E-02▲	1.21E-12▲	3.34E-01▲	1.20E-12▲	1.21E-12▲
$f_{19}(x)$	3.02E-11▲	3.02E-11▲	5.24E-10▲	1.07E-07▲	3.02E-11▲	3.02E-11▲	3.02E-11▲	3.02E-11▲
$f_{20}(x)$	1.90E-10▲	0.00E+00▲	4.05E-12▲	8.15E-11▲	3.02E-11▲	9.51E-06▲	3.02E-11▲	5.83E-10▲
$f_{21}(x)$	2.37E-12▲	2.37E-12▲	2.37E-12▲	2.37E-12▲	2.37E-12▲	2.37E-12▲	2.37E-12▲	2.37E-12▲
$f_{22}(x)$	1.21E-12▲	1.21E-12▲	1.21E-12▲	1.21E-12▲	1.21E-12▲	1.21E-12▲	1.21E-12▲	1.21E-12▲
$f_{23}(x)$	1.21E-12▲	1.21E-12▲	1.21E-12▲	1.21E-12▲	1.21E-12▲	1.21E-12▲	1.21E-12▲	1.21E-12▲
$f_{24}(x)$	1.21E-12▲	1.21E-12▲	1.21E-12▲	1.21E-12▲	1.21E-12▲	1.21E-12▲	1.21E-12▲	1.21E-12▲
$f_{25}(x)$	1.21E-12▲	1.21E-12▲	1.21E-12▲	1.21E-12▲	1.21E-12▲	1.21E-12▲	1.21E-12▲	1.21E-12▲
$f_{26}(x)$	3.02E-11▲	3.02E-11▲	3.02E-11▲	3.02E-11▲	3.02E-11▲	3.02E-11▲	3.02E-11▲	3.02E-11▲
$f_{27}(x)$	1.21E-12▲	1.21E-12▲	1.21E-12▲	1.21E-12▲	1.21E-12▲	1.21E-12▲	1.21E-12▲	1.21E-12▲
$f_{28}(x)$	3.02E-11▲	3.02E-11▲	1.95E-03▲	1.95E-03▲	3.02E-11▲	3.02E-11▲	3.02E-11▲	3.02E-11▲
$f_{29}(x)$	3.02E-11▲	3.02E-11▲	3.02E-11▶	3.02E-11▲	3.02E-11▲	3.02E-11▲	3.02E-11▲	3.02E-11▲
$f_{30}(x)$	1.21E-12▲	1.21E-12▲	1.21E-12▲	1.21E-12▲	1.21E-12▲	1.21E-12▲	1.21E-12▲	1.21E-12▲
▲	29	30	26	26	30	28	30	30
▶	1	0	3	4	0	2	0	0
▼	0	0	1	0	0	0	0	0

Tabla 3. Comparación en términos de significancia

Esta validación estadística apoya y refuerza la confianza en el rendimiento del algoritmo propuesto en comparación con los otros algoritmos. En el análisis de Wilcoxon se indujeron 30 pruebas por función considerando un nivel de significancia de 0.05. Los resultados de los valores “p” son presentados en la Tabla 3, donde a su vez cada una de las pruebas realizadas de los algoritmos se llevaron a cabo en 30 dimensiones. Para mejorar la interpretación de los datos de la Tabla 3, se utilizó la siguiente simbología: ▲, ►, y ▼, donde cada uno de estos símbolos representa una condición diferente. El símbolo ▲ representa que la metodología propuesta supera a las otras metodologías en términos de calidad en sus soluciones. El símbolo ► indica que las dos metodologías comparadas producen soluciones similares. El símbolo ▼ representa que las soluciones generadas por la metodología propuesta son deficientes comparadas con las soluciones de las demás metodologías. Y con ello, como se puede observar en la Tabla 3, la mayoría de los resultados obtenidos superan la calidad demostrando así que la metodología propuesta mejora la calidad de las soluciones.

### 4.3. Análisis de las Gráficas de Convergencia

Evaluar la precisión de un algoritmo de optimización basándose solamente en las soluciones obtenidas es ineficiente para demostrar sus capacidades, por otro lado, la convergencia de un algoritmo juega un rol crucial para demostrar su eficacia y precisión. En esta tercera subsección se realiza un estudio de la convergencia para poder demostrar la velocidad con la que el algoritmo metaheurístico propuesto llega a la óptima solución. Para facilitar el entendimiento del estudio se realizaron graficas de convergencia para funciones representativas en 30 dimensiones en la Fig.1. Los gráficos fueron generados con los resultados obtenidos de la etapa de experimentación.



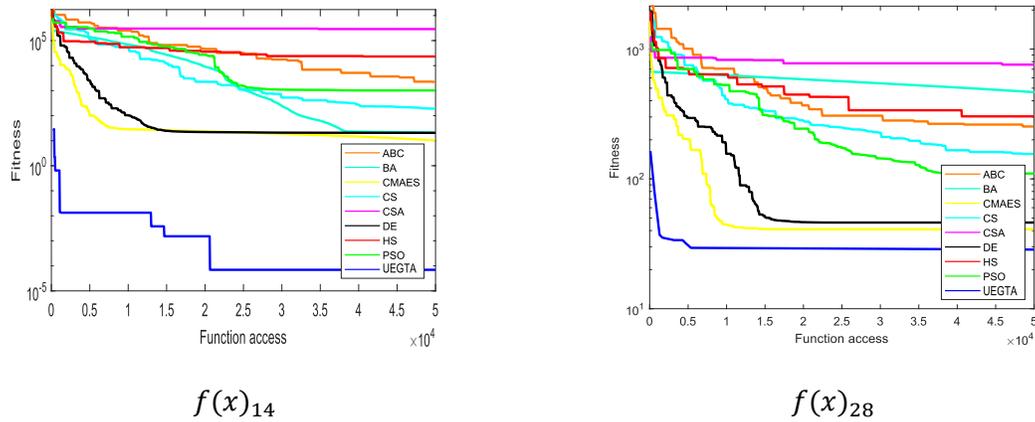


Fig.1. Graficas de la Curva de Convergencia

De acuerdo con las gráficas mostradas en la Fig. 1, el algoritmo propuesto U-EGTA demuestra una convergencia superior comparada con el resto de los algoritmos.

## 5. Conclusiones

Este trabajo introduce un nuevo algoritmo de optimización basado en los principios de la Teoría de Juegos Evolutivos, la cual da comienzo con la inicialización de todos los individuos usando la técnica de Metropolis-Hasting posicionando las soluciones cada vez más cerca de las regiones optimas. Cada uno de los individuos en la población tiene su propia estrategia, conforme el algoritmo progresa, interacciones y competiciones entre los individuos se llevan a cabo para poder llegar a una adaptación continua y a un ajuste de sus propias estrategias. El objetivo principal es que las estrategias más efectivas se difundan por toda la población para poco a poco ir disminuyendo y eliminar las estrategias menos efectivas, esto se logra refinando y actualizando constantemente las estrategias basándose en el rendimiento de estas mismas. Con ello, el algoritmo emplea, de manera efectiva, estrategias de búsqueda prometedoras para explorar y explotar el espacio de búsqueda, enriqueciendo su habilidad para encontrar el óptimo global en problemas de optimización complejos.

Para evaluar el rendimiento del algoritmo propuesto, se comparó contra ocho de los más conocidos algoritmos metaheurísticos usando 30 funciones benchmark. La metodología propuesta demuestra superioridad en términos de calidad en las soluciones, en términos significativos y en la convergencia cuando es comparado con otros. Así mismo, el algoritmo propuesto tiene el potencial para resolver problemas de la vida cotidiana, así como para resolver diferentes funciones; esto debido a que su versatilidad y efectividad lo convierte en una opción prometedora para pruebas prácticas esto basado en los excelentes resultados demostrados en la sección de experimentación. Puede explorarse y probarse más a fondo en diferentes dominios con diversos tipos de problemas para evaluar su eficacia y desempeño.

## Referencias

- [1] X.-S. Yang, *Engineering Optimization. An Introduction with Metaheuristic Applications*. United States of America: WILEY, 2010.
- [2] M. Abdel-Basset, L. Abdel-Fatah, and A. K. Sangaiah, "Metaheuristic Algorithms: A Comprehensive Review," *Comput. Intell. Multimed. Big Data Cloud with Eng. Appl.*, pp. 185–231, Jan. 2018.
- [3] B. Chopard and M. Tomassini, *An introduction to metaheuristics for optimization*. 2018.
- [4] T. Dokeroglu, E. Sevinc, T. Kucukyilmaz, and A. Cosar, "A survey on new generation metaheuristic algorithms," *Comput. Ind. Eng.*, vol. 137, no. August, p. 106040, 2019.
- [5] D. Karaboga, "An idea based on honey bee swarm for numerical optimization," 2005.
- [6] X.-S. S. Yang, "A New Metaheuristic Bat-Inspired Algorithm BT - Nature Inspired Cooperative Strategies for Optimization (NICO 2010)," *Stud. Comput. Intell.*, vol. 284, pp. 65–74, 2010.
- [7] R. Storn and K. Price, "Differential Evolution – A Simple and Efficient Heuristic for Global Optimization over Continuous Spaces," *Australas. Plant Pathol.*, vol. 38, no. 3, pp. 284–287, 1995.
- [8] J. Kennedy, R. Eberhart, and B. Gov, "Particle Swarm Optimization," *Encycl. Mach. Learn.*, pp. 760–6, 1995.
- [9] X. S. Yang and S. Deb, "Cuckoo search via Lévy flights," *2009 World Congr. Nat. Biol. Inspired Comput. NABIC 2009 - Proc.*, pp. 210–214, 2009.
- [10] A. Askarzadeh, "A novel metaheuristic method for solving constrained engineering optimization problems: Crow search algorithm," *Comput. Struct.*, vol. 169, pp. 1–12, Jun. 2016.
- [11] A. Auger and N. Hansen, "Performance evaluation of an advanced local search evolutionary algorithm," *2005 IEEE Congr. Evol. Comput. IEEE CEC 2005. Proc.*, vol. 2, pp. 1777–1784, 2005.
- [12] E. Cuevas, A. Echavarría, and M. A. Ramírez-Ortegón, "An optimization algorithm inspired by the States of Matter that improves the balance between exploration and exploitation," *Appl. Intell.*, vol. 40, no. 2, pp. 256–272, Mar. 2014.
- [13] S. Mirjalili, "SCA: A Sine Cosine Algorithm for solving optimization problems," *Knowledge-Based Syst.*, vol. 96, pp. 120–133, 2016.
- [14] S. Kirkpatrick, C. D. Gelatt, and M. P. Vecchi, "Optimization by Simulated Annealing," *Science (80-)*, vol. 220, no. 4598, pp. 671–680, May 1983.
- [15] E. Cuevas, A. Echavarría, and M. A. Ramírez-Ortegón, "An optimization algorithm inspired by the States of Matter that improves the balance between exploration and exploitation," *Appl. Intell.*, vol. 40, no. 2, pp. 256–272, Mar. 2014.
- [16] A. R. Giri, T. Chen, V. P. Rajendran, and A. Khamis, "A Metaheuristic Approach to Emergency Vehicle Dispatch and Routing," *2022 IEEE Int. Conf. Smart Mobility, SM 2022*, pp. 27–31, 2022.
- [17] A. Afzal *et al.*, "Optimizing the thermal performance of solar energy devices using meta-heuristic algorithms: A critical review," *Renew. Sustain. Energy Rev.*, vol. 173, p. 112903, Mar. 2023.
- [18] E. Vaziri, F. Dehdar, and M. R. Abdoli, "Feasibility study of using meta-heuristic algorithms on optimizing of the integrated risk in banking system," *Int. J. Financ. Manag. Account.*, vol. 8, no. 28, pp. 143–158, Jan. 2023.
- [19] S. Kaur, Y. Kumar, A. Koul, and S. Kumar Kamboj, "A Systematic Review on Metaheuristic Optimization Techniques for Feature Selections in Disease Diagnosis: Open Issues and Challenges," *Arch. Comput. Methods Eng.* 2022 303, vol. 30, no. 3, pp. 1863–1895, Nov. 2022.
- [20] D. H. Wolpert and W. G. Macready, "No free lunch theorems for optimization," *IEEE Trans. Evol.*

*Comput.*, vol. 1, no. 1, pp. 67–82, 1997.

- [21] Wu, B., Bauer, B., Galla, T., & Traulsen, A. (2015). Fitness-based models and pairwise comparison models of evolutionary games are typically different—even in unstructured populations. *New Journal of Physics*, 17(2), 023043.
- [22] Li, Q., Liu, S. Y., & Yang, X. S. (2020). Influence of initialization on the performance of metaheuristic optimizers. *Applied Soft Computing*, 91, 106193.
- [23] E. Cuevas, H. Escobar, R. Sarkar, and H. F. Eid, "A new population initialization approach based on Metropolis–Hastings (MH) method," *Appl. Intell.*, vol. 53, no. 13, pp. 16575–16593, Dec. 2022.
- [24] H. Gintis, *Game theory evolving: A problem-centered introduction to modeling strategic behavior*. Princeton university press, 2000.
- [25] L. R. Izquierdo, S. S. Izquierdo, and W. H. Sandholm, "Agent-Based Evolutionary Game Dynamics Agent-Based Evolutionary Game Dynamics," *Univ. Wisconsin Press.*, p. 207, 2020.
- [26] O. Kapliński and J. Tamošaitiene, "Game theory applications in construction engineering and management," *Technol. Econ. Dev. Econ.*, vol. 16, no. 2, pp. 348–363, 2010.
- [27] T. M. Choi, A. A. Taleizadeh, and X. Yue, "Game theory applications in production research in the sharing and circular economy era," <https://doi.org/10.1080/00207543.2019.1681137>, vol. 58, no. 1, pp. 118–127, Jan. 2019.
- [28] M. Leng and M. Parlar, "Game Theoretic Applications in Supply Chain Management: A Review," <http://dx.doi.org/10.1080/03155986.2005.11732725>, vol. 43, no. 3, pp. 187–220, 2016.
- [29] McAvoy, A., & Wakeley, J. (2022). Evaluating the structure-coefficient theorem of evolutionary game theory. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 119(28), e2119656119.
- [30] C. Leboucher *et al.*, "An enhanced particle swarm optimization method integrated with evolutionary game theory," *IEEE Trans. Games*, vol. 10, no. 2, pp. 221–230, Jun. 2018.
- [31] J. W. Weibull, *Evolutionary game theory*. MIT press, 1997.
- [32] P. Hammerstein and R. Selten, "Game theory and evolutionary biology," *Handb. game theory with Econ. Appl.*, vol. 2, pp. 929–993, 1994.
- [33] Agushaka, J. O., Ezugwu, A. E., Abualigah, L., Alharbi, S. K., & Khalifa, H. A. E. W. (2023). Efficient initialization methods for population-based metaheuristic algorithms: a comparative study. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 30(3), 1727-1787.
- [34] D. B. Hitchcock, "A History of the Metropolis–Hastings Algorithm," <http://dx.doi.org/10.1198/0003130032413>, vol. 57, no. 4, pp. 254–257, 2012.
- [35] E. Cuevas, H. Escobar, R. Sarkar, and H. F. Eid, "A new population initialization approach based on Metropolis–Hastings (MH) method," *Appl. Intell.*, vol. 53, no. 13, pp. 16575–16593, Dec. 2022.
- [36] F. Wilcoxon, "Probability Tables for Individual Comparisons by Ranking Methods," *Biometrics*, vol. 3, no. 3, p. 119, Sep. 1947.

## Apéndice A

	Nombre	Función	S	Mínimo
$f(\mathbf{x})_1$	Ackley	$-20 \exp\left(-0.2 \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2}\right) - \exp\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \cos(2\pi x_i)\right) + 20 + \exp(31)$	$[-30, 30]^n$	$f(\mathbf{x}^*) = 0;$ $\mathbf{x}^* = (0, \dots, 0)$
$f(\mathbf{x})_2$	Dixon	$(x_1 - 1)^2 + \sum_{i=1}^n i(2x_i^2 - x_{i-1})^2$	$[-10, 10]^n$	$f(\mathbf{x}^*) = 0;$ $\mathbf{x}^* = 2 \frac{2^i - 2}{2^i}$ for $i = 1, \dots, n$
$f(\mathbf{x})_3$	Griewank	$\sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{4000} - \prod_{i=1}^n \cos\left(\frac{x_i}{\sqrt{i}}\right) + 1$	$[-600, 600]^n$	$f(\mathbf{x}^*) = 0;$ $\mathbf{x}^* = (0, \dots, 0)$
$f(\mathbf{x})_4$	Infinity	$\sum_{i=1}^n x_i^6 \text{sen}(x_i + 2)$	$[-1, 1]^n$	$f(\mathbf{x}^*) = 0;$ $\mathbf{x}^* = (0, \dots, 0)$
$f(\mathbf{x})_5$	Mishra1	$(1 + x_n)^{x_n}; \quad x_n = n - \sum_{i=1}^{n-1} x_i$	$[0, 1]^n$	$f(\mathbf{x}^*) = 2;$ $\mathbf{x}^* = (1, \dots, 1)$
$f(\mathbf{x})_6$	Mishra2	$(1 + x_n)^{x_n}; \quad x_n = n - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$	$[0, 1]^n$	$f(\mathbf{x}^*) = 2;$ $\mathbf{x}^* = (1, \dots, 1)$
$f(\mathbf{x})_7$	Penalty 1	$\frac{\pi}{n} \times \left\{ 10 \sin^2(\pi \varphi_1) + \sum_{i=1}^{n-1} (\varphi_i - 1)^2 [1 + 10 \sin^2(\pi \varphi_{i+1})] + (\varphi_n - 1)^2 \right\}$ $+ \sum_{i=1}^n u(x_i, a, k, m)$ $\varphi_i = 1 + \frac{1}{4}(x_i + 1), \quad u(x_i, a, k, m) = \begin{cases} k(x_i - a)^m & \text{if } x_i > a \\ 0 & \text{if } -a \leq x_i \\ k(-x_i - a)^m & \text{if } x_i < a \end{cases}$ $a = 10, \quad k = 100, \quad m = 4$	$[-50, 50]^n$	$f(\mathbf{x}^*) = 0;$ $\mathbf{x}^* = (-1, \dots, -1)$
$f(\mathbf{x})_8$	Penalty 2	$0.1 \times \left\{ \sin^2(3\pi x_1) + \sum_{i=1}^{n-1} (x_i - 1)^2 [1 + \sin^2(3\pi x_{i+1})] + (x_n - 1)^2 [1 + \sin^2(2\pi x_n)] \right\}$ $+ \sum_{i=1}^n u(x_i, a, k, m)$ $u(x_i, a, k, m) = \begin{cases} k(x_i - a)^m & \text{if } x_i > a \\ 0 & \text{if } -a \leq x_i \\ k(-x_i - a)^m & \text{if } x_i < a \end{cases}$ $a = 5, \quad k = 100, \quad m = 4$	$[-50, 50]^n$	$f(\mathbf{x}^*) = 0;$ $\mathbf{x}^* = (1, \dots, 1)$
$f(\mathbf{x})_9$	Plateau	$30 + \sum_{i=1}^n  x_i $	$[-5.12, 5.12]^n$	$f(\mathbf{x}^*) = 30;$ $\mathbf{x}^* = (0, \dots, 0)$
$f(\mathbf{x})_{10}$	Powell	$\sum_{i=1}^{\frac{n}{4}} [(x_{4i-3} + 10x_{4i-2})^2 + 5(x_{i-1} + x_{4i})^2 + (x_{4i-2} + 2x_{4i-1})^4 + 10(x_{4i-3} + x_{4i})^4]$	$[-4, 5]^n$	$f(\mathbf{x}^*) = 0;$ $\mathbf{x}^* = (0, \dots, 0)$
$f(\mathbf{x})_{11}$	Quartic	$\sum_{i=1}^n i * x_i^4 + \text{rand}(0,1)$	$[-1.28, 1.28]^n$	$f(\mathbf{x}^*) = 0;$ $\mathbf{x}^* = (0, \dots, 0)$
$f(\mathbf{x})_{12}$	Quintic	$\sum_{i=1}^n  x_i^5 - 3x_i^4 + 4x_i^3 + 2x_i^2 - 10x_i - 4 $	$[-10, 10]^n$	$f(\mathbf{x}^*) = 0;$ $\mathbf{x}^* = (-1, \dots, -1)$
$f(\mathbf{x})_{13}$	Rastrigin	$10n + \sum_{i=1}^n [x_i^2 - 10 \cos(2\pi x_i)]$	$[-5.12, 5.12]^n$	$f(\mathbf{x}^*) = 0;$ $\mathbf{x}^* = (0, \dots, 0)$
$f(\mathbf{x})_{14}$	Rosenbrock	$\sum_{i=1}^{n-1} [100(x_{i+1} - x_i^2)^2 + (x_i - 1)^2]$	$[-5, 10]^n$	$f(\mathbf{x}^*) = 0;$ $\mathbf{x}^* = (1, \dots, 1)$
$f(\mathbf{x})_{15}$	Schwefel21	$418.9829n - \sum_{i=1}^n x_i \sin\left(\sqrt{ x_i }\right)$	$[-100, 100]^n$	$f(\mathbf{x}^*) = 0;$ $\mathbf{x}^* = (0, \dots, 0)$
$f(\mathbf{x})_{16}$	Schwefel22	$\sum_{i=1}^n  x_i  + \prod_{i=1}^n  x_i $	$[-100, 100]^n$	$f(\mathbf{x}^*) = 0;$ $\mathbf{x}^* = (0, \dots, 0)$

$f(x)_{17}$	Step	$\sum_{i=1}^n (x_i + 0.5)^2$	$[-100, 100]^n$	$f(x^*) = 0;$ $x^* = (0, \dots, 0)$
$f(x)_{18}$	Stybtang	$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x_i^4 - 16x_i^2 + 5x_i)$	$[-5, 5]^n$	$f(x^*) = -39.1659n;$ $x^* = (-2.90, \dots, 2.90)$
$f(x)_{19}$	Trid	$\sum_{i=1}^n (x_i - 1)^2 - \sum_{i=2}^n x_i x_{i-1}$	$[-n^2, n^2]^n$	$f(x^*) = -n(n+4)(n-1)/6;$ $x^* = [i(n+1-i)]$ for $i = 1, \dots, n$
$f(x)_{20}$	Vincent	$-\sum_{i=1}^n \sin^2(10 \log x_i)$	$[0.25, 10]^n$	$f(x^*) = -n;$ $x^* = (7.70, \dots, 7.70)$
$f(x)_{21}$	Zakharov	$\sum_{i=1}^n x_i^2 + \left( \sum_{i=1}^n 0.5ix_i \right)^2 + \left( \sum_{i=1}^n 0.5ix_i \right)^4$	$[-5, 10]^n$	$f(x^*) = 0;$ $x^* = (0, \dots, 0)$
$f(x)_{22}$	Rothyp	$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i x_j^2$	$[-65.536, 65.536]^n$	$f(x^*) = 0;$ $x^* = (0, \dots, 0)$
$f(x)_{23}$	Schwefel2	$\sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^i x_j \right)^2$	$[-100, 100]^n$	$[-100, 100]^n$
$f(x)_{24}$	Sphere	$\sum_{i=1}^n x_i^2$	$[-5, 5]^n$	$f(x^*) = 0;$ $x^* = 0, \dots, 0$
$f(x)_{25}$	Sum2	$\sum_{i=1}^n ix_i^2$	$[-10, 10]^n$	$f(x^*) = 0;$ $x^* = (0, \dots, 0)$
$f(x)_{26}$	Sum of different powers	$\sum_{i=1}^n  x_i ^{i+1}$	$[-1, 1]^n$	$f(x^*) = 0;$ $x^* = (0, \dots, 0)$
$f(x)_{27}$	Rastrigin+ Schwefel2+ Sphere	$10n + \sum_{i=1}^n [x_i^2 - 10 \cos(2\pi x_i)] + \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^i x_j \right)^2 + \sum_{i=1}^n x_i^2$	$[-100, 100]^n$	$f(x^*) = 0;$ $x^* = (0, \dots, 0)$
$f(x)_{28}$	Griewank+ Rastrigin+ Rosenbrock	$\sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{4000} - \prod_{i=1}^n \cos\left(\frac{x_i}{\sqrt{i}}\right) + 1 + 10n + \sum_{i=1}^n [x_i^2 - 10 \cos(2\pi x_i)]$ $+ \sum_{i=1}^{n-1} [100(x_{i+1} - x_i^2)^2 + (x_i - 1)^2]$	$[-100, 100]^n$	$f(x^*) = n - 1;$ $x^* = (0, \dots, 0)$
$f(x)_{29}$	Ackley+ Penalty2+ Rosenbrock+ Schwefel2	$-20 \exp\left(-0.2 \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2}\right) - \exp\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \cos(2\pi x_i)\right) + 20 + \exp(1)$ $+ (0.1 \{\sin(3\pi x_i) + \sum_{i=1}^n (x_i - 1)^2 [1 + \sin^2(3\pi x_i + 1)]\})$ $+ [(x_n - 1)^2 [1 + \sin^2(2\pi x_n)]] + \sum_{i=1}^n u(x_i, 5.100, 4) + \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^i x_j \right)^2$	$[-100, 100]^n$	$f(x^*) = (1.1n) - 1;$ $x^* = (0, \dots, 0)$
$f(x)_{30}$	Ackley+ Griewank+ Rastrigin+ Rosenbrock+ Schwefel22	$-20 \exp\left(-0.2 \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2}\right) - \exp\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \cos(2\pi x_i)\right) + 20 + \exp(1)$ $+ \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{4000} - \prod_{i=1}^n \cos\left(\frac{x_i}{\sqrt{i}}\right) + 1 + 10n + \sum_{i=1}^n [x_i^2 - 10 \cos(2\pi x_i)]$ $+ \sum_{i=1}^{n-1} [100(x_{i+1} - x_i^2)^2 + (x_i - 1)^2] + \sum_{i=1}^n  x_i  + \prod_{i=1}^n  x_i $	$[-100, 100]^n$	$f(x^*) = n - 1;$ $x^* = (0, \dots, 0)$

